page 226 1/3 - 1992 -
E.S.I.M. Math. Appliquées

SESSION DE 1992

Options M et P'

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

DURÉE : 2 heures

BUT :

On cherche sur un intervalle une approximation quadratique d'une fonction, par un polynôme de degré donné.

Dans la partie I, le polynôme est cherché dans une base de polynômes de Tchebychev et, dans la partie II, dans une base (à construire) de polynômes orthogonaux.

RÉALISATION :

Les procédures demandées plus loin doivent être écrites dans le langage Turbo-Pascal du programme.

ÉNONCÉ :

On connaît les $(n + 1)$ valeurs y_k d'une fonction f, prises aux $(n + 1)$ points distincts x_k de l'intervalle $[0, 1]$, avec k de 0 à n.

On a donc : $y_k = f(x_k)$.

On souhaite approcher f sur $[0, 1]$ par un polynôme H de degré p, donné strictement inférieur à n, tel que :

$$Q = \sum_{k=0}^{n} [H(x_k) - y_k]^2 \text{ soit minimum.}$$

On note $\mathbb{R}_p[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leqslant p$.

Tournez la page S.V.P.

I

1. On définit, pour $j \in \mathbb{N}$, le polynôme de Tchebychev T_j par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_j(\cos\theta) = \cos j\theta .$$

a. Démontrer :

$$\forall j \geqslant 2,\ T_j(x) = 2x\,T_{j-1}(x) - T_{j-2}(x) \qquad (1)$$

et que $(T_j)_{0 \leqslant j \leqslant p}$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

b. On pose : $H = \sum_{i=0}^{p} a_i T_i$, alors Q est un polynôme du 2e degré aux $(p+1)$ variables : $a_0, a_1, .., a_p$.

Q est minimum lorsque l'on a :

$$\forall j \in [0..p] \quad \frac{\partial Q}{\partial a_j} = 0 . \qquad (2)$$

Écrire à l'aide des $(T_i(x_k))$, $i \in [0..p]$ et $k \in [0..n]$, l'équation :

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial Q}{\partial a_j} = 0 .$$

c. On définit la matrice U, dont l'élément de la ligne $k\,(0 \leqslant k \leqslant n)$ et de la colonne $j\,(0 \leqslant j \leqslant p)$ est $T_j(x_k)$, la matrice unicolonne A dont les éléments sont les a_i, $(0 \leqslant i \leqslant p)$, et la matrice unicolonne V dont les éléments sont les :

$$\gamma_i = \sum_{k=0}^{n} y_k\,T_i(x_k),\ (0 \leqslant i \leqslant p).$$

Montrer que le système d'équation (2) s'écrit : ${}^tUUA = V$ (3).

Prouver que le système : ${}^tUUA = 0$ n'admet que la solution nulle et donc que la matrice symétrique $S = {}^tUU$ est inversible.

Ainsi : $A = S^{-1}V$. Quel est l'ordre de S ?

2. Dans l'en-tête du programme figurent les déclarations suivantes :

```
CONST  Nmax = 20;
TYPE   Vecteur = Array [0 .. Nmax] of real;
       Matrice = Array [0 .. Nmax, 0 .. Nmax] of real;
VAR    n, p : integer; (*p est le degré du polynôme cherché, p < n < = Nmax*)
       X, Y : Vecteur; (* X contient les x_k et Y les y_k, k de 0 à n*)
       U : Matrice; (*voir § I.1.c.*).
```

Le programme comporte aussi :

```
Procedure MAZ matrice (Var M : Matrice);
Procedure MAZ vecteur (Var W : Vecteur);
```

{ Ces procédures mettent à zéro tous les éléments de M ou de W }

```
Procedure InvMatrice (M1 : Matrice; q : integer; Var M2 : Matrice);
```

{ Cette procédure, qu'on ne demande pas d'écrire, donne dans M2 l'inverse du bloc formé des q premières lignes et des q premières colonnes de M1 }

a. Écrire, à l'aide des relations (1), une :

Procedure Tchebychev (Var M : Matrice) ;

pour que, dans le programme principal, l'instruction Tchebychev (U); fournisse la matrice U du paragraphe I.1.*c.*

b. Écrire une Procedure MatVecteur (M : Matrice; W : Vecteur; Var P : Vecteur); donnant dans P le produit MW.

3. Écrire une Procedure coefficients (Var A : Vecteur): donnant dans A les coefficients du polynôme H cherché. Avant d'obtenir A, cette procédure calculera le vecteur V et la matrice symétrique S du paragraphe I.1.*c.*

II

On cherche à construire $(p + 1)$ polynômes P_j, j de 0 à p, tels que :

$$\text{degré } (P_j) = j \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} P_i(x_k)\, P_j(x_k) = \delta_{ij} \quad \text{c'est-à-dire } 0 \text{ si } i \neq j \text{ et } 1 \text{ si } i = j.$$

1. *a.* Soit $(V, W) \in \mathbb{R}_p[X]^2$, on pose $(V \mid W) = \sum_{k=0}^{n} V(x_k)\, W(x_k)$.

Démontrer que $(V \mid W)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_p[X]$ et que (P_j) pour j de 0 à p est une base orthonormale de $\mathbb{R}_p[X]$.

b. On pose : $H = \sum_{i=0}^{p} C_i P_i$. Démontrer : $C_i = \sum_{k=0}^{n} y_k P_i(x_k)$.

2. On écrit les polynômes de Tchebychev dans la base (P_i) :

$$T_j = \sum_{i=0}^{j} b_{ji} P_i.$$

a. Démontrer : $b_{00}^2 = n + 1$ et $P_0 = \dfrac{1}{b_{00}}$.

$$\forall j \in [1 \,..\, p] \quad b_{jj}^2 = \sum_{k=0}^{n} T_j^2(x_k) - \sum_{i=0}^{j-1} b_{ji}^2.$$

b. Démontrer : $\forall j \in [1 \,..\, p],\ \forall q \in [0 \,..\, j-1],\ b_{jq} = \sum_{k=0}^{n} T_j(x_k)\ P_q(x_k)$.

Ainsi $\forall j \in [1 \,..\, p],\ P_j = \dfrac{1}{b_{jj}} \left[T_j - \sum_{i=0}^{j-1} b_{ji} P_i \right]$.

3. On note P la matrice dont l'élément de la ligne j, $(0 \leqslant j \leqslant p)$, et de la colonne k, $(0 \leqslant k \leqslant n)$, est $P_j(x_k)$ et B la matrice dont l'élément de la ligne j, $(0 \leqslant j \leqslant p)$, et de la colonne i, $(0 \leqslant i \leqslant p)$, est b_{ji}.

Écrire une Procedure Coeforthogonaux (Var C : Vecteur); donnant dans C les coefficients C_i. Avant d'obtenir C, cette procédure calculera les matrices B et P.

On suppose connus l'en-tête du programme et les procédures données dans la partie I.